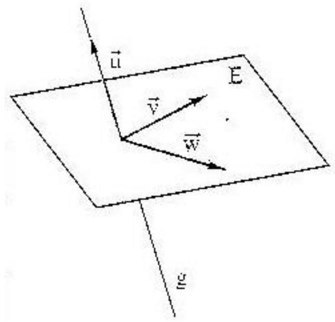
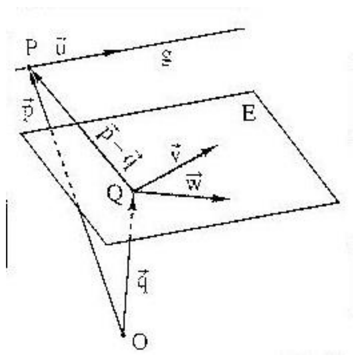
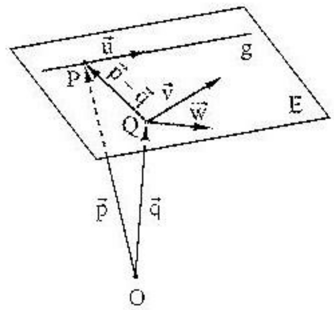
Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene

Eine Gerade definiert man als **g:** $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$, eine Ebene als **E:** $\vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$.
Sie können sich schneiden, parallel sein, oder aufeinander liegen.

Gerade **g** schneidet Ebene **E**	Gerade **g** ist parallel zu Ebene **E**	Gerade **g** liegt in Ebene **E**
		
$\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear **un**abhängig	$\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear **ab**hängig	$\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear **ab**hängig
	$\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear **un**abhängig	$\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear **ab**hängig

Rechnerisch:

Gerade und Ebene **schneiden sich**, wenn : $\vec{p} + t \cdot \vec{u} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ **eine** Lösung hat
Gerade ist **parallel** zur Ebene, wenn : $\vec{p} + t \cdot \vec{u} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ **keine** Lösung hat
Gerade **liegt auf** der Ebene, wenn : $\vec{p} + t \cdot \vec{u} = \vec{q} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ **unendlich** Lösungen

Richtungsvektoren (von Ebene und Gerade)

↙ ↘

Linear unabhängig → Stützvektor der Gerade auf Ebene?

- Ja → Liegen **aufeinander**
- Nein → Liegen **parallel**

Linear abhängig → Gerade und Ebene **schneiden** sich

Beispielaufgaben:

a) Bestimmung des Durchstoßpunktes bei Ebene in Parameterform

Von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.Gleichsetzen $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{cases} 2+t=1+2r-s \\ 2-t=1-s \\ 1+t=5+r+3s \end{cases}$

2. Lineares Gleichungssystem lösen und t herausfinden

$t = -\frac{1}{3}$ $r = -\frac{1}{3}$ $s = -\frac{4}{3}$

3. t in Parametergleichung der Geraden einsetzen für den Durchstoßpunkt D

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ....D $\left(1\frac{2}{3} \quad 2\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right)$

b) Bestimmung des Durchstoßpunktes bei Ebene in Koordinatenform

Von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Ebene E: $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 49$

1. Aus der Geradengleichung x-Werte herauslesen

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ entspricht $\begin{matrix} x_1 = 3+2t \\ x_2 = 4+t \\ x_3 = 7-t \end{matrix}$

2. x-Werte in Koordinatengleichung der Ebene einsetzen

$2 \cdot (3+2t) + 5 \cdot (4+t) \; -(7-t) \; = 49$

3.Ausrechnen und in Geradengleichung einsetzen

t=3.... $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ....$\boldsymbol{D = (9 \mid 7 \mid 4)}$